The Torus T^2 Is Equivalent to The Product $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ of Two Circles

Kristina Sojakova

March 8, 2014

Recursion and Induction Principles for T^2

The torus T^2 is a higher inductive type generated by a point $b : T^2$, two paths $p : b = b$, $q : b = b$, and a 2-path $t : p \cdot q = q \cdot p$. The recursion principle thus says that given $C : \mathcal{U}$, for a function $f : T^2 \to C$ we require

- a point $b' : C$,
- a path $p' : b' = b'$,
- a path $q' : b' = b'$, and
- a 2-path $t' : p' \cdot q' = q' \cdot p'$.

The recursor $f : T^2 \to C$ then has the property that $f(b) \equiv b'$. Furthermore, there exist terms $\beta : f(p) = p'$ and $\gamma : f(q) = q'$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc}
f(p \cdot q) & \overset{\mathsf{ap}_{\mathsf{ap}_f}(t)}{\rule{2cm}{0.4pt}} & f(q \cdot p) \\
\Big| & & \Big| \\
f(p) \cdot f(q) & = & f(q) \cdot f(p) \\
\text{via } \beta, \gamma \Big| & & \Big| \text{ via } \beta, \gamma \\
p' \cdot q' & \underset{t'}{\rule{2cm}{0.4pt}} & q' \cdot p'
\end{array}$$

The induction principle is more complicated; it says that given a family $P : T^2 \to \mathcal{U}$, for a section $f : \prod_{(x:T^2)} P(x)$ we require

- a point $b' : P(b)$,
- a path $p' : p_*(b') = b'$,
- a path $q' : q_*(b') = b'$, and
- a 2-path t' witnessing the equality of the following two paths from $(q \cdot p)_*(b')$ to b':

$$\left(\mathsf{ap}_{\alpha \mapsto \alpha_*(b')}(t)\right)^{-1} \cdot \left(\mathsf{happly}_{\mathcal{I}_P(p,q)}(b') \cdot \mathsf{ap}_{q_*}(p') \cdot q'\right)$$
$$\mathsf{happly}_{\mathcal{I}_P(q,p)}(b') \cdot \mathsf{ap}_{p_*}(q') \cdot p'$$

where for any type family $B : A \to \mathcal{U}$ and paths $\alpha : x =_A y$ and $\alpha' : y =_A z$, the path

$$\mathcal{I}_E(\alpha, \alpha') : (\alpha \cdot \alpha')_* = \lambda(u : B(x)).\, \alpha'_*(\alpha_*(u))$$

is obtained by a path induction on α and α'.

The inductor $f : \prod_{(x:T^2)} P(x)$ then has the property that $f(b) \equiv b'$. Furthermore, there exist terms $\beta : \mathsf{apd}_f(p) = p'$ and $\gamma : \mathsf{apd}_f(q) = q'$ such that the 2-path

$$\mathsf{apd}_{\mathsf{apd}_f}(t) : \mathsf{transport}^{\alpha \mapsto \alpha_*(b') = b'}(t, \mathsf{apd}_f(p \cdot q)) = \mathsf{apd}_f(q \cdot p)$$

is equal to the 2-path

$$\begin{array}{c}
\mathsf{transport}^{\alpha \mapsto \alpha_*(b') = b'}(t, \mathsf{apd}_f(p \cdot q)) \\
\Big| \; \mathcal{T}^{b'}_{\alpha \mapsto \alpha_*(b')}(t, \mathsf{apd}_f(p \cdot q)) \\
\left(\mathsf{ap}_{\alpha \mapsto \alpha_*(b')}(t)\right)^{-1} \cdot \mathsf{apd}_f(p \cdot q) \\
\Big| \; \text{via } \mathcal{D}_f(p, q) \\
\left(\mathsf{ap}_{\alpha \mapsto \alpha_*(b')}(t)\right)^{-1} \cdot \left(\mathsf{happly}_{\mathcal{I}_P(p,q)}(b') \cdot \mathsf{ap}_{q_*}(\mathsf{apd}_f(p)) \cdot \mathsf{apd}_f(q)\right) \\
\Big| \; \text{via } \beta, \gamma \\
\left(\mathsf{ap}_{\alpha \mapsto \alpha_*(b')}(t)\right)^{-1} \cdot \left(\mathsf{happly}_{\mathcal{I}_P(p,q)}(b') \cdot \mathsf{ap}_{q_*}(p') \cdot q'\right) \\
\Big| \; t' \\
\mathsf{happly}_{\mathcal{I}_P(q,p)}(b') \cdot \mathsf{ap}_{p_*}(q') \cdot p' \\
\Big| \; \text{via } \beta^{-1}, \gamma^{-1} \\
\mathsf{happly}_{\mathcal{I}_P(q,p)}(b') \cdot \mathsf{ap}_{p_*}(\mathsf{apd}_f(q)) \cdot \mathsf{apd}_f(p) \\
\Big| \; \mathcal{D}_f(q, p)^{-1} \\
\mathsf{apd}_f(q \cdot p)
\end{array}$$

where for any $g : A \to B$, $c : B$, $\alpha : a =_A a'$ and $u : g(a) =_B c$, the path

$$\mathcal{T}^c_g(\alpha, u) : \mathsf{transport}^{x \to g(x) = c}(\alpha, u) = g(\alpha)^{-1} \cdot u$$

is obtained by a straightforward path induction on α. Similarly, for any $g : \prod_{(x:A)} B(x)$ and paths $\alpha : x =_A y$, $\alpha' : y =_A z$, the path

$$\mathcal{D}_g(\alpha, \alpha') : \mathsf{apd}_g(\alpha \cdot \alpha') = \mathsf{happly}_{\mathcal{I}_B(\alpha,\alpha')}(g(x)) \cdot \mathsf{ap}_{\alpha'_*}(\mathsf{apd}_g(\alpha)) \cdot \mathsf{apd}_g(\alpha')$$

is obtained by a path induction on α and α'.

Equivalence between $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ and T^2

Logical equivalence between $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ and T^2

We define a function $f : \mathbb{S}^1 \to T^2$ by circle recursion, mapping $\mathsf{base} \mapsto b$ and $\mathsf{loop} \mapsto p$. We define a function $F^{\to} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \to T^2$ again by circle recursion, mapping $\mathsf{base} \mapsto f$ and $\mathsf{loop} \mapsto \mathsf{funext}(H)$, where $H : \prod_{(x:\mathbb{S}^1)} f(x) = f(x)$ is defined by circle induction as follows. We map base to q and loop to the path

$$\begin{array}{c} \mathsf{transport}^{z \mapsto f(z)=f(z)}(\mathsf{loop}, q) \\ \Big| \; \mathcal{T}_1(\mathsf{loop}, q) \\ f(\mathsf{loop})^{-1} \cdot (q \cdot f(\mathsf{loop})) \\ \Big| \; \mathcal{I}_1(\delta) \\ q \end{array}$$

where for any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$, and $u : f(x) = f(x)$, the path

$$\mathcal{T}_1(\alpha, u) : \mathsf{transport}^{z \mapsto f(z)=f(z)}(\alpha, u) = f(\alpha)^{-1} \cdot u \cdot f(\alpha)$$

is obtained by a straightforward path induction on α. For any $u : a =_A b$, $v : b =_A d$, $w : a =_A c$, $z : c =_A d$, we have functions

$$\mathcal{I}_1 : (u \cdot v = w \cdot z) \to (u^{-1} \cdot w \cdot z = v)$$
$$\mathcal{I}_1^{-1} : (u^{-1} \cdot w \cdot z = v) \to (u \cdot v = w \cdot z)$$

defined by path induction on u and z, which form a quasi-equivalence. Finally, δ is the path

$$\begin{array}{c} f(\mathsf{loop}) \cdot q \\ \Big| \; \text{via } \beta_f \\ p \cdot q \\ \Big| \; t \\ q \cdot p \\ \Big| \; \text{via } \beta_f \\ q \cdot f(\mathsf{loop}) \end{array}$$

where $\beta_f : f(\mathsf{loop}) = p$ witnesses the second computation rule for the circle.

Having defined a function $F^{\to} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \to T^2$, it is now straightforward to define a function $F^{\times} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to T^2$. For the other direction, we define $G : T^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ by torus recursion as follows. We map $b \mapsto (\mathsf{base}, \mathsf{base})$, $p \mapsto \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}, \mathsf{loop})$, $q \mapsto \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}_{\mathsf{base}})$, and $t \mapsto \Phi_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}}$, where for $\alpha : x =_A x'$ and $\alpha' : y =_A y'$,

$$\Phi_{\alpha,\alpha'} : \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}_x, \alpha') \cdot \mathsf{pair}^=(\alpha, \mathsf{refl}_{y'})\Big) = \Big(\mathsf{pair}^=(\alpha, \mathsf{refl}_y) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}_{x'}, \alpha')\Big)$$

is defined by induction on α'.

This completes the definition of a logical equivalence between $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ and T^2. Before we proceed to show that it is in fact a quasi-equivalence, we note a few key properties of the functions $H, F^{\times}, G$ constructed above.

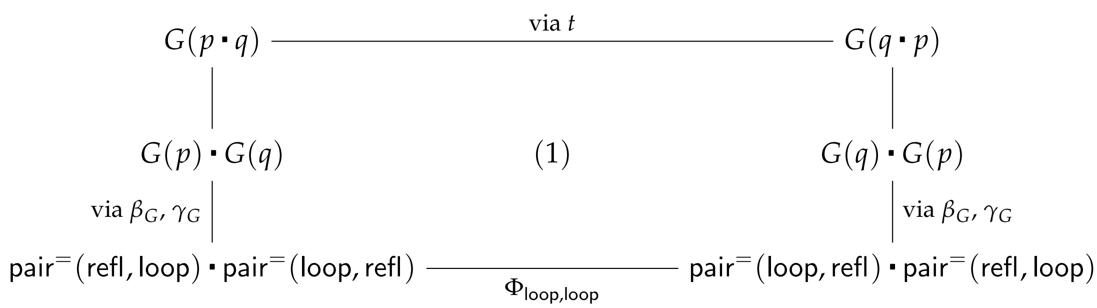
The 1-path computation rule for $F^{\rightarrow}$ gives us a term

$$\beta_{F^{\rightarrow}} : F^{\rightarrow}(\mathsf{loop}) = \mathsf{funext}(H)$$

The 1-path computation rules for G give us terms

$$\beta_G : G(p) = \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}, \mathsf{loop})$$
$$\gamma_G : G(q) = \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}_{\mathsf{base}})$$

The 2-path computation rule for G gives us the following commuting diagram:



For any $\alpha : x =_{T^2} x'$ and $\alpha' : y =_{T^2} y'$, we have path families

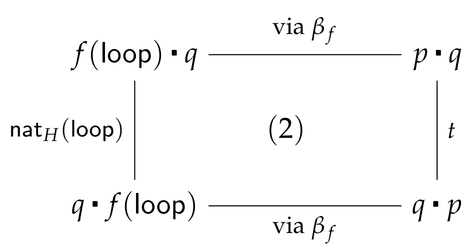
$$\mu(\alpha') : F^{\times}\big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}_x, \alpha')\big) = F^{\rightarrow}(x)(\alpha')$$
$$\nu(\alpha) : F^{\times}\big(\mathsf{pair}^{=}(\alpha, \mathsf{refl}_y)\big) = \mathsf{happly}_{F^{\rightarrow}(\alpha)}(y)$$

defined by path induction on α and α'.

The function H is a homotopy between f and f. As such, for any path $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$, there exists a 2-path

$$\mathsf{nat}_H(\alpha) : f(\alpha) \cdot H(y) = H(x) \cdot f(\alpha)$$

defined by induction on α. In the case when $\alpha :\equiv \mathsf{loop}$, we can show that the following diagram commutes:



To show this, we note that for any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$, applying $\mathcal{I}_1^{-1}$ to the path

$$\begin{array}{c} f(\alpha)^{-1} \cdot H(x) \cdot f(\alpha) \\ \Big| \; \mathcal{T}_1(\alpha, H(x))^{-1} \\ \mathsf{transport}^{z \mapsto f(z) = f(z)}(\alpha, H(x)) \\ \Big| \; \mathsf{apd}_H(\alpha) \\ H(y) \end{array}$$

yields precisely $\mathsf{nat}_H(\alpha)$ (by a simple path induction on α). The second computation rule for H tells us that $\mathsf{apd}_H(\mathsf{loop}) = \mathcal{T}_1(\mathsf{loop}, q) \cdot \mathcal{I}_1(\delta)$. Thus

$$\mathsf{nat}_H(\mathsf{loop}) = \mathcal{I}_1^{-1}\big(\mathcal{T}_1(\mathsf{loop}, q)^{-1} \cdot \mathsf{apd}_H(\mathsf{loop})\big) = \delta$$

which proves the commutativity of (2).

Equivalence between $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ and T^2

Left-to-right We need to show that for any $x, y : \mathbb{S}^1$ we have $G(F^\times(x, y)) = (x, y)$. To use the circle induction, we first define a path family $\epsilon : \prod_{(y:\mathbb{S}^1)} G(f(y)) = (\mathsf{base}, y)$. The definition of ϵ itself proceeds by circle induction: we map base to the path $\mathsf{refl}_{(\mathsf{base},\mathsf{base})}$ and loop to the path

$$\begin{array}{c} \mathsf{transport}^{z \mapsto G(f(z)) = (\mathsf{base}, z)}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\ \Big| \; \mathcal{T}_2(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\ G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\ \Big| \; \mathcal{I}_1(\kappa) \\ \mathsf{refl} \end{array}$$

where for any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$ and $u : G(f(x)) = (\mathsf{base}, x)$, the path

$$\mathcal{T}_2(\alpha, u) : \mathsf{transport}^{z \mapsto G(f(z)) = (\mathsf{base}, z)}(\alpha, u) = G(f(\alpha))^{-1} \cdot u \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha)$$

is defined by path induction on α. Finally, κ is the path

$$\begin{array}{c} G(f(\mathsf{loop})) \cdot \mathsf{refl} \\ \Big| \\ G(f(\mathsf{loop})) \\ \Big| \; \text{via } \beta_f, \beta_G \\ \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\ \Big| \\ \mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \end{array}$$

This finishes the definition of ϵ. As before, for any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$ we have a 2-path

$$\mathsf{nat}_\epsilon(\alpha) : G(f(\alpha)) \cdot \epsilon(y) = \epsilon(x) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha)$$

defined by induction on α. In the case $\alpha :\equiv \mathsf{loop}$, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} G(f(\mathsf{loop})) \cdot \mathsf{refl} & \text{———} & G(f(\mathsf{loop})) \\ {\scriptstyle \mathsf{nat}_\epsilon(\mathsf{loop})} \Big| & (3) & \Big| {\scriptstyle \text{via } \beta_f, \beta_G} \\ \mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) & \text{——} & \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \end{array}$$

To show this, we note that for any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$, applying $\mathcal{I}_1^{-1}$ to the path

$$\begin{array}{c} G(f(\alpha))^{-1} \cdot \epsilon(x) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha) \\ \Big| {\scriptstyle \mathcal{T}_2(\alpha, \epsilon(x))^{-1}} \\ \mathsf{transport}^{z \mapsto G(f(z)) = (\mathsf{base}, z)}(\alpha, \epsilon(x)) \\ \Big| {\scriptstyle \mathsf{apd}_\epsilon(\alpha)} \\ \epsilon(y) \end{array}$$

yields precisely $\mathsf{nat}_\epsilon(\alpha)$ (by a simple path induction on α). The second computation rule for ϵ tells us that $\mathsf{apd}_\epsilon(\mathsf{loop}) = \mathcal{T}_2(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathcal{I}_1(\kappa)$. Thus

$$\mathsf{nat}_\epsilon(\mathsf{loop}) = \mathcal{I}_1^{-1}\big(\mathcal{T}_2(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})^{-1} \cdot \mathsf{apd}_\epsilon(\mathsf{loop})\big) = \kappa$$

which proves the commutativity of (3).

All that remains now is to prove that

$$\mathsf{transport}^{x \mapsto \prod_{(y:\mathbb{S}^1)} G(F^\times(x,y)) = (x,y)}(\mathsf{loop}, \epsilon) = \epsilon$$

The left endpoint can be expressed explicitly as the function

$$y \mapsto G\Big(\mathsf{happly}_{F^\to(\mathsf{loop})}(y)\Big)^{-1} \cdot \epsilon(y) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})$$

as a generalization of loop to an arbitrary α and a subsequent path induction on α shows. By function extensionality it thus suffices to show that for any $y : \mathbb{S}^1$, we have

$$G\Big(\mathsf{happly}_{F^\to(\mathsf{loop})}(y)\Big)^{-1} \cdot \epsilon(y) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) = \epsilon(y)$$

The left endpoint can be simplified using $\beta_{F^\to}$ and the fact that happly and funext form a quasi-inverse:

$$G(H(y))^{-1} \cdot \epsilon(y) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) = \epsilon(y)$$

Showing the above is the same as showing

$$G(H(y)) \cdot \epsilon(y) = \epsilon(y) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})$$

for any $y : \mathbb{S}^1$. We proceed yet again by circle induction. We map base to the path η below:

$$\begin{array}{c} G(q) \cdot \mathsf{refl} \\ \Big| \\ G(q) \\ \Big| \; \gamma_G \\ \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\ \Big| \\ \mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \end{array}$$

Now it remains to show that

$$\mathsf{transport}^{z \mapsto G(H(z)) \cdot \epsilon(z) = \epsilon(z) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop},\mathsf{refl})}(\mathsf{loop}, \eta) = \eta$$

For any $u : a =_A b$, $v : b =_A d$, $w : a =_A c$, $z : c =_A d$, we have functions

$$\mathcal{I}_2 : (u \cdot v = w \cdot z) \to (v \cdot z^{-1} = u^{-1} \cdot w)$$
$$\mathcal{I}_2^{-1} : (v \cdot z^{-1} = u^{-1} \cdot w) \to (u \cdot v = w \cdot z)$$

defined by induction on u and z, which form a quasi-equivalence. For any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$, let $\delta^\star(\alpha)$ be the path

$$\begin{array}{c} G(f(\alpha)) \cdot G(H_y) \\ \Big| \\ G(f(\alpha) \cdot H_y) \\ \Big| \; \text{via } \mathsf{nat}_H(\alpha) \\ G(H_x \cdot f(\alpha)) \\ \Big| \\ G(H_x) \cdot G(f(\alpha)) \end{array}$$

Given any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$ and $\eta' : G(H(x)) \cdot \eta(x) = \eta(x) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})$, we can now express the path $\mathsf{transport}^{z \mapsto G(H(z)) \cdot \epsilon(z) = \epsilon(z) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop},\mathsf{refl})}(\alpha, \eta')$ explicitly as the following path:

$$
\begin{aligned}
& G(H_y) \cdot \epsilon_y \\
& \quad = G(H_y) \cdot \Big(G(f(\alpha))^{-1} \cdot G(f(\alpha)) \Big) \cdot \epsilon_y \\
& \quad = \Big(G(H_y) \cdot G(f(\alpha))^{-1} \Big) \cdot \Big(G(f(\alpha)) \cdot \epsilon_y \Big) \\
& \quad = \Big(G(f(\alpha))^{-1} \cdot G(H_x) \Big) \cdot \Big(G(f(\alpha)) \cdot \epsilon_y \Big) && \text{via } \mathcal{I}_2(\delta^\star(\alpha)) \\
& \quad = \Big(G(f(\alpha))^{-1} \cdot G(H_x) \Big) \cdot \Big(\epsilon_x \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha) \Big) && \text{via } \mathsf{nat}_\epsilon(\alpha) \\
& \quad = G(f(\alpha))^{-1} \cdot \Big(G(H_x) \cdot \epsilon_x \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha) \\
& \quad = G(f(\alpha))^{-1} \cdot \Big(\epsilon_x \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha) && \text{via } \eta' \\
& \quad = \Big(G(f(\alpha))^{-1} \cdot \epsilon_x \Big) \cdot \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha) \Big) \\
& \quad = \Big(G(f(\alpha))^{-1} \cdot \epsilon_x \Big) \cdot \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) && \text{via } \Phi^{-1}_{\mathsf{loop},\alpha} \\
& \quad = G(f(\alpha))^{-1} \cdot \Big(\epsilon_x \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \alpha) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
& \quad = G(f(\alpha))^{-1} \cdot \Big(G(f(\alpha)) \cdot \epsilon_y \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) && \text{via } \mathsf{nat}_\epsilon(\alpha)^{-1} \\
& \quad = \Big(G(f(\alpha))^{-1} \cdot G(f(\alpha)) \Big) \cdot \Big(\epsilon_y \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \\
& \quad = \epsilon_y \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{aligned}
$$

In the case $\alpha :\equiv \mathsf{loop}$ and $\eta' :\equiv \eta$ we thus have:

$$
\begin{array}{c}
G(q) \cdot \mathsf{refl} \\
\Big| \\
G(q) \cdot \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(f(\mathsf{loop})) \Big) \cdot \mathsf{refl} \\
\Big| \\
\Big(G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \Big) \cdot \Big(G(f(\mathsf{loop})) \cdot \mathsf{refl} \Big) \\
\Big| \text{ via } \mathcal{I}_2(\delta^\star(\mathsf{loop})) \\
\Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(q) \Big) \cdot \Big(G(f(\mathsf{loop})) \cdot \mathsf{refl} \Big) \\
\Big| \text{ via } \mathsf{nat}_\epsilon(\mathsf{loop}) \\
\Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(q) \Big) \cdot \Big(\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \\
\Big| \\
G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \Big(G(q) \cdot \mathsf{refl} \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \eta \\
G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \Big(\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \\
\Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \mathsf{refl} \Big) \cdot \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \\
\Big| \text{ via } \Phi^{-1}_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
\Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \mathsf{refl} \Big) \cdot \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \\
\Big| \\
G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \Big(\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \text{ via } \mathsf{nat}_\epsilon(\mathsf{loop})^{-1} \\
G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \Big(G(f(\mathsf{loop})) \cdot \mathsf{refl} \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(f(\mathsf{loop})) \Big) \cdot \Big(\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \\
\Big| \\
\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{array}
$$

We can now use the commutativity of (3) and get rid of the extraneous identity paths to obtain:

$$
\begin{aligned}
& G(q) \centerdot \mathsf{refl} \\
&= G(q) \\
&= G(q) \centerdot \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot G(f(\mathsf{loop})) \Big) \\
&= \Big(G(q) \centerdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \Big) \centerdot G(f(\mathsf{loop})) \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot G(q) \Big) \centerdot G(f(\mathsf{loop})) && \text{via } \mathcal{I}_2(\delta^\star(\mathsf{loop})) \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot G(q) \Big) \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) && \text{via } \beta_f, \beta_G \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) && \text{via } \gamma_G \\
&= G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot \Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \\
&= G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot \Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) && \text{via } \Phi^{-1}_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \centerdot G(f(\mathsf{loop})) \Big) \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) && \text{via } \beta_G^{-1}, \beta_f^{-1} \\
&= \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
&= \mathsf{refl} \centerdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{aligned}
$$

or equivalently:

$$
\begin{aligned}
& G(q) \cdot \mathsf{refl} \\
&= G(q) \\
&= G(q) \cdot \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(f(\mathsf{loop})) \Big) \\
&= \Big(G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \Big) \cdot G(f(\mathsf{loop})) \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(q) \Big) \cdot G(f(\mathsf{loop})) && \text{via } \mathcal{I}_2(\delta^\star(\mathsf{loop})) \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(q) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) && \text{via } \beta_f, \beta_G \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) && \text{via } \gamma_G \\
&= G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \\
&= G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) && \text{via } \Phi^{-1}_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
&= \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
&= \Big(\mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) && \text{via } \beta_f, \beta_G \\
&= \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
&= \mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{aligned}
$$

After some rearranging we get:

$$
\begin{array}{c}
G(q) \cdot \mathsf{refl} \\
\Big| \\
G(q) \\
\Big| \\
G(q) \cdot \left(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(f(\mathsf{loop}))\right) \\
\Big| \\
\left(G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1}\right) \cdot G(f(\mathsf{loop})) \\
\Big| \text{ via } \beta_f, \beta_G \\
\left(G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1}\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \mathcal{I}_2(\delta^{\star}(\mathsf{loop})) \\
\left(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(q)\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \gamma_G \\
\left(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \beta_f, \beta_G \\
\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})\right) \\
\Big| \text{ via } \Phi^{-1}_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})\right) \\
\Big| \\
\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{array}
$$

We now observe the following:

- For any paths $\alpha_u : u_1 =_{a=_A b} u_2$, $\alpha_v : v_1 =_{b=_A d} v_2$, $\alpha_w : w_1 =_{a=_A c} w_2$, $\alpha_z : z_1 =_{c=_A d} z_2$ and $\phi : u_1 \cdot v_1 = w_1 \cdot z_1$, $\phi' : u_2 \cdot v_2 = w_2 \cdot z_2$, we have

$$\begin{array}{ccccc}
u_1 \cdot v_1 & \overset{\text{via } \alpha_v}{\text{———}} & u_1 \cdot v_2 & \overset{\text{via } \alpha_u}{\text{———}} & u_2 \cdot v_2 \\
\phi \Big| & & = & & \Big| \phi' \\
w_1 \cdot z_1 & \underset{\text{via } \alpha_z}{\text{———}} & w_1 \cdot z_2 & \underset{\text{via } \alpha_w}{\text{———}} & w_2 \cdot z_2
\end{array}$$

if and only if

$$\begin{array}{ccccc}
v_1 \cdot z_1^{-1} & \overset{\text{via } \alpha_z}{\text{———}} & v_1 \cdot z_2^{-1} & \overset{\text{via } \alpha_v}{\text{———}} & v_2 \cdot z_2^{-1} \\
\mathcal{I}_2(\phi) \Big| & & = & & \Big| \mathcal{I}_2(\phi') \\
u_1^{-1} \cdot w_1 & \underset{\text{via } \alpha_w}{\text{———}} & u_1^{-1} \cdot w_2 & \underset{\text{via } \alpha_u}{\text{———}} & u_2^{-1} \cdot w_2
\end{array}$$

This follows at once by path induction on $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w, \alpha_z$ and the fact that $\mathcal{I}_2$ is an equivalence.

Next we want to show that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc}
G(f(\mathsf{loop})) \cdot G(q) & \overset{\text{via } \beta_f, \beta_G, \gamma_G}{\text{—————}} & \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\delta^\star(\mathsf{loop}) \Big| & (4) & \Big| \Phi_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop})) & \underset{\text{via } \beta_f, \beta_G, \gamma_G}{\text{—————}} & \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})
\end{array}$$

This is the same as saying that the outer rectangle in the diagram below commutes:

$$\begin{array}{ccccc}
G(f(\mathsf{loop})) \cdot G(q) & \overset{\text{via } \beta_f}{\text{———}} & G(p) \cdot G(q) & \overset{\text{via } \beta_G, \gamma_G}{\text{———}} & \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| & \text{A} & \Big| & & \Big| \\
G(f(\mathsf{loop}) \cdot q) & \underset{\text{via } \beta_f}{\text{———}} & G(p \cdot q) & & \\
\mathsf{nat}_H(\mathsf{loop}) \Big| & \text{B} & \Big| \text{ via } t & \text{D} & \Big| \Phi_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
G(q \cdot f(\mathsf{loop})) & \underset{\text{via } \beta_f}{\text{———}} & G(q \cdot p) & & \\
\Big| & \text{C} & \Big| & & \Big| \\
G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop})) & \underset{\text{via } \beta_f}{\text{———}} & G(q) \cdot G(p) & \underset{\text{via } \beta_G, \gamma_G}{\text{———}} & \mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^=(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})
\end{array}$$

But this is clear: A and C obviously commute, B is precisely the diagram (2), and D is the diagram (1).

Since (4) commutes, by our earlier observation the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc}
G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1} & \xrightarrow{\text{via } \beta_f, \beta_G, \gamma_G} & \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \\
\mathcal{I}_2(\delta^\star(\mathsf{loop})) \Big| & & \Big| \mathcal{I}_2(\Phi_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}}) \\
G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(q) & \xrightarrow[\text{via } \gamma_G, \beta_f, \beta_G]{} & \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{array}$$

Our path can now be equivalently stated as:

$$
\begin{array}{c}
G(q) \cdot \mathsf{refl} \\
\Big| \\
G(q) \\
\Big| \\
G(q) \cdot \Big(G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \cdot G(f(\mathsf{loop})) \Big) \\
\Big| \\
\Big(G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \Big) \cdot G(f(\mathsf{loop})) \\
\Big| \text{ via } \beta_f, \beta_G \\
\Big(G(q) \cdot G(f(\mathsf{loop}))^{-1} \Big) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \beta_f, \beta_G \\
\Big(G(q) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \gamma_G \\
\Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \mathcal{I}_2(\Phi_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}}) \\
\Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \\
\Big| \text{ via } \Phi^{-1}_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \Big) \\
\Big| \\
\Big(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \Big) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{array}
$$

which is equal to:

$$
\begin{array}{c}
G(q) \cdot \mathsf{refl} \\
\Big| \\
G(q) \\
\Big| \text{ via } \gamma_G \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})\right) \\
\Big| \\
\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1}\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \text{ via } \mathcal{I}_2(\Phi_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}}) \\
\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \\
\Big| \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})\right) \\
\Big| \text{ via } \Phi^{-1}_{\mathsf{loop},\mathsf{loop}} \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})\right) \\
\Big| \\
\left(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop})\right) \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{array}
$$

We now make the following observation:

- For any paths $u : a =_A b$, $v : b =_A d$, $w : a =_A c$, $z : c =_A d$ and $\phi : u \cdot v = w \cdot z$, the path

$$
\begin{array}{c}
v \\
\Big| \\
v \cdot (z^{-1} \cdot z) \\
\Big| \\
(v \cdot z^{-1}) \cdot z \\
\Big| \text{ via } \mathcal{I}_2(\phi) \\
(u^{-1} \cdot w) \cdot z \\
\Big| \\
u^{-1} \cdot (w \cdot z) \\
\Big| \phi^{-1} \\
u^{-1} \cdot (u \cdot v) \\
\Big| \\
(u^{-1} \cdot u) \cdot v \\
\Big| \\
v
\end{array}
$$

is equal to the identity path at v. This follows by path induction on u and z.

Using the above observation, we can express our path simply as

$$
\begin{array}{c}
G(q) \cdot \mathsf{refl} \\
\Big| \\
G(q) \\
\Big| \text{ via } \gamma_G \\
\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}) \\
\Big| \\
\mathsf{refl} \cdot \mathsf{pair}^{=}(\mathsf{loop}, \mathsf{refl})
\end{array}
$$

which is precisely η.

Right-to-left We need to show that for any $x : T^2$ we have $F^{\times}(G(t)) = t$. We use torus induction, with $b' :\equiv \mathsf{refl}_b$. We let p' be the path

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(p, \mathsf{refl}) \\
\Big| \; \mathcal{T}_3(p, \mathsf{refl}) \\
F^{\times}(G(p))^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot p \\
\Big| \; \zeta_p \\
\mathsf{refl}
\end{array}
$$

where for any $\alpha : x =_{T^2} y$ and $u : F^{\times}(G(x)) = x$, the path

$$\mathcal{T}_3(\alpha, u) : \mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(\alpha, u) = F^{\times}(G(\alpha))^{-1} \cdot u \cdot \alpha$$

is defined by path induction on α and ζ_p is the path

$$
\begin{array}{c}
F^{\times}(G(p))^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot p \\
\Big| \\
F^{\times}(G(p))^{-1} \cdot p \\
\Big| \; \text{via } \beta_G \\
F^{\times}(\mathsf{pair}^{=}(\mathsf{refl}, \mathsf{loop}))^{-1} \cdot p \\
\Big| \; \text{via } \mu(\mathsf{loop}) \\
f(\mathsf{loop})^{-1} \cdot p \\
\Big| \; \text{via } \beta_f \\
p^{-1} \cdot p \\
\Big| \\
\mathsf{refl}
\end{array}
$$

Similarly, let q' be the path

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(q, \mathsf{refl}) \\
\Big| \; \mathcal{T}_3(q, \mathsf{refl}) \\
F^{\times}(G(q))^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot q \\
\Big| \; \zeta_q \\
\mathsf{refl}
\end{array}
$$

where ζ_q is the path

$$\begin{array}{c}
F^\times(G(q))^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot q \\
\Big| \\
F^\times(G(q))^{-1} \cdot q \\
\Big| \text{ via } \gamma_G \\
F^\times(\mathsf{pair}^=(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}))^{-1} \cdot q \\
\Big| \text{ via } \nu(\mathsf{loop}) \\
\mathsf{happly}_{F^\to(\mathsf{loop})}(\mathsf{base})^{-1} \cdot q \\
\Big| \text{ via } \beta_{F^\to} \\
\mathsf{happly}_{\mathsf{funext}(H)}(\mathsf{base})^{-1} \cdot q \\
\Big| \text{ via } \mathsf{happly\text{-}funext\text{-}inv}(H) \\
q^{-1} \cdot q \\
\Big| \\
\mathsf{refl}
\end{array}$$

All that remains now is to show that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(p \cdot q, \mathsf{refl}) & \xrightarrow{\text{via } t} & \mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(q \cdot p, \mathsf{refl}) \\
\Big| & & \Big| \\
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(q, \mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(p, \mathsf{refl})) & & \mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(p, \mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(q, \mathsf{refl})) \\
\Big| \text{ via } p' & & \Big| \text{ via } q' \\
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(q, \mathsf{refl}) & & \mathsf{transport}^{z \mapsto F^\times(G(z))=z}(p, \mathsf{refl}) \\
& \overset{q'}{\searrow} \quad \mathsf{refl} \quad \overset{p'}{\swarrow} &
\end{array}$$

We make the following observation:

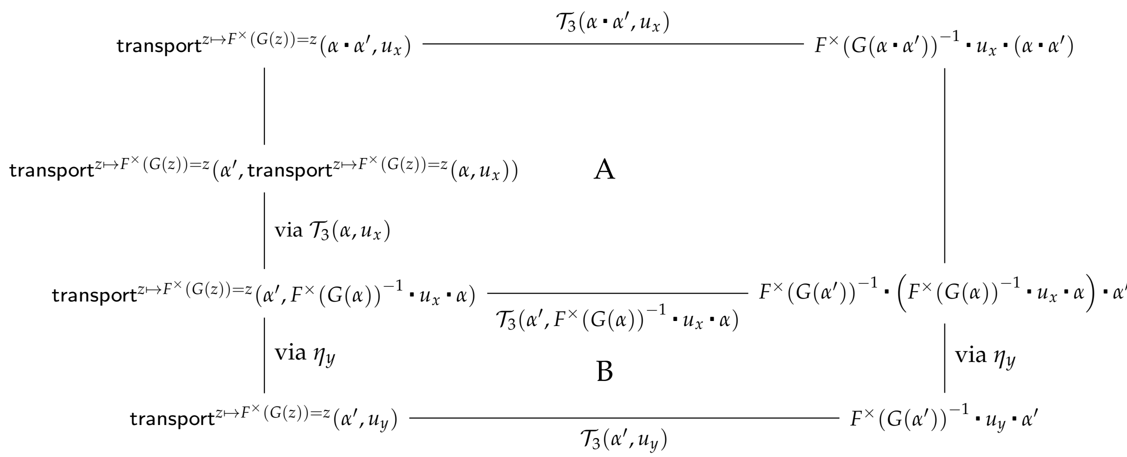
- For any $\alpha : x =_{T^2} y$, $\alpha' : y =_{T^2} z$, $u_x : F^\times(G(x)) = x$, $u_y : F^\times(G(y)) = y$, $u_z : F^\times(G(z)) = z$, and $\eta_y : F^\times(G(\alpha))^{-1} \cdot u_x \cdot \alpha = u_y$, $\eta_z : F^\times(G(\alpha'))^{-1} \cdot u_y \cdot \alpha' = u_z$, the path

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(\alpha \cdot \alpha', u_x) \\
\Big| \\
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(\alpha', \mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(\alpha, u_x)) \\
\Big| \text{ via } \mathcal{T}_3(\alpha, u_x) \\
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(\alpha', F^{\times}(G(\alpha))^{-1} \cdot u_x \cdot \alpha) \\
\Big| \text{ via } \eta_y \\
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(\alpha', u_y) \\
\Big| \ \mathcal{T}_3(\alpha', u_y) \\
F^{\times}(G(\alpha'))^{-1} \cdot u_y \cdot \alpha' \\
\Big| \ \eta_z \\
u_z
\end{array}
$$

can be equivalently expressed as the path

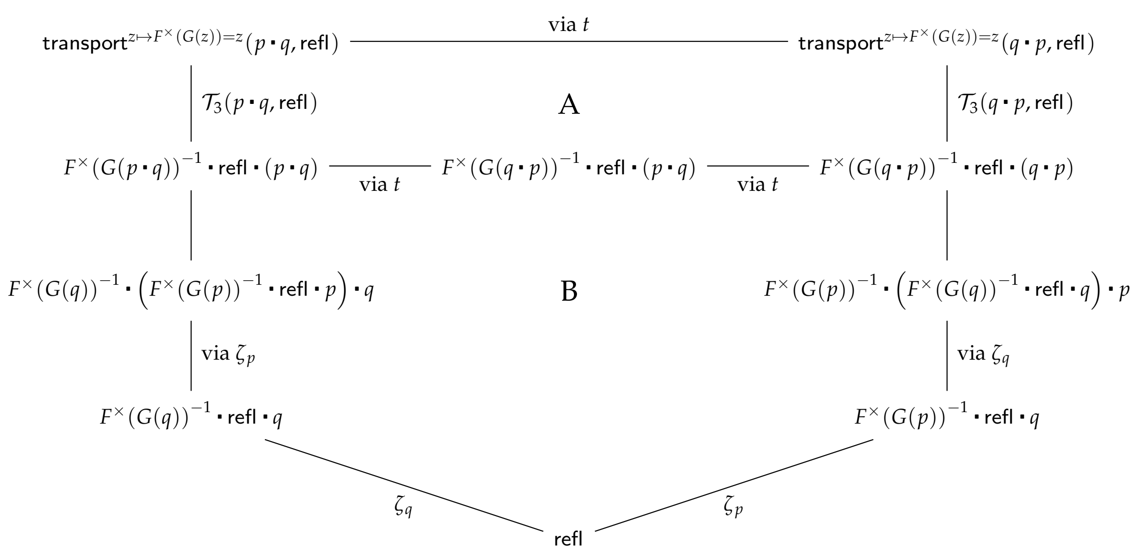
$$
\begin{array}{c}
\mathsf{transport}^{z \mapsto F^{\times}(G(z))=z}(\alpha \cdot \alpha', u_x) \\
\Big| \ \mathcal{T}_3(\alpha \cdot \alpha', u_x) \\
F^{\times}(G(\alpha \cdot \alpha'))^{-1} \cdot u_x \cdot (\alpha \cdot \alpha') \\
\Big| \\
F^{\times}(G(\alpha'))^{-1} \cdot \left(F^{\times}(G(\alpha))^{-1} \cdot u_x \cdot \alpha\right) \cdot \alpha' \\
\Big| \text{ via } \eta_y \\
F^{\times}(G(\alpha'))^{-1} \cdot u_y \cdot \alpha' \\
\Big| \ \eta_z \\
u_z
\end{array}
$$

To prove this, it suffices to show that the outer rectangle in the diagram below commutes:



Both of the rectangles A and B are easily shown to commute by a suitable path induction.

Using the above observation, it suffices to show that the outer part of the following diagram commutes:



Since rectangle A clearly commutes, it suffices to prove that part B commutes.

We can equivalently express diagram B as

$$
\begin{array}{ccccc}
F^{\times}(G(p\cdot q))^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot(p\cdot q) & \overline{\quad \text{via } t \quad} & F^{\times}(G(q\cdot p))^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot(p\cdot q) & \overline{\quad \text{via } t \quad} & F^{\times}(G(q\cdot p))^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot(q\cdot p) \\
\Big| & & & & \Big| \\
\color{red}{\left(F^{\times}(G(p))\cdot F^{\times}(G(q))\right)^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot(p\cdot q)} & & & & \color{red}{\left(F^{\times}(G(q))\cdot F^{\times}(G(p))\right)^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot(q\cdot p)} \\
\Big| & & & & \Big| \\
F^{\times}(G(q))^{-1}\cdot\left(F^{\times}(G(p))^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot p\right)\cdot q & & & & F^{\times}(G(p))^{-1}\cdot\left(F^{\times}(G(q))^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot q\right)\cdot p \\
\Big| \text{ via } \zeta_p & & & & \Big| \text{ via } \zeta_q \\
F^{\times}(G(q))^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot q & & & & F^{\times}(G(p))^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot q \\
& \diagdown_{\ \zeta_q} & & {}_{\zeta_p}\diagup & \\
& & \mathsf{refl} & &
\end{array}
$$

We make the following observation:

- For any $\alpha_u : u_1 =_{a=_A b} u_2$, $\alpha_v : v_1 =_{b=_A c} v_2$, the path

$$
\begin{array}{c}
(u_1\cdot v_1)^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot(u_2\cdot v_2) \\
\Big| \\
v_1^{-1}\cdot(u_1^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot u_2)\cdot v_2 \\
\Big| \\
v_1^{-1}\cdot(u_1^{-1}\cdot u_2)\cdot v_2 \\
\Big| \text{ via } \alpha_u \\
v_1^{-1}\cdot(u_2^{-1}\cdot u_2)\cdot v_2 \\
\Big| \\
v_1^{-1}\cdot \mathsf{refl}\cdot v_2 \\
\Big| \\
v_1^{-1}\cdot v_2 \\
\Big| \text{ via } \alpha_v \\
v_2^{-1}\cdot v_2 \\
\Big| \\
\mathsf{refl}
\end{array}
$$

  is equivalent to the path

$$(u_1 \cdot v_1)^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot (u_2 \cdot v_2)$$

$$\Big| \text{ via } \alpha_u$$

$$(u_2 \cdot v_1)^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot (u_2 \cdot v_2)$$

$$\Big| \text{ via } \alpha_v$$

$$(u_2 \cdot v_2)^{-1} \cdot \mathsf{refl} \cdot (u_2 \cdot v_2)$$

$$\Big|$$

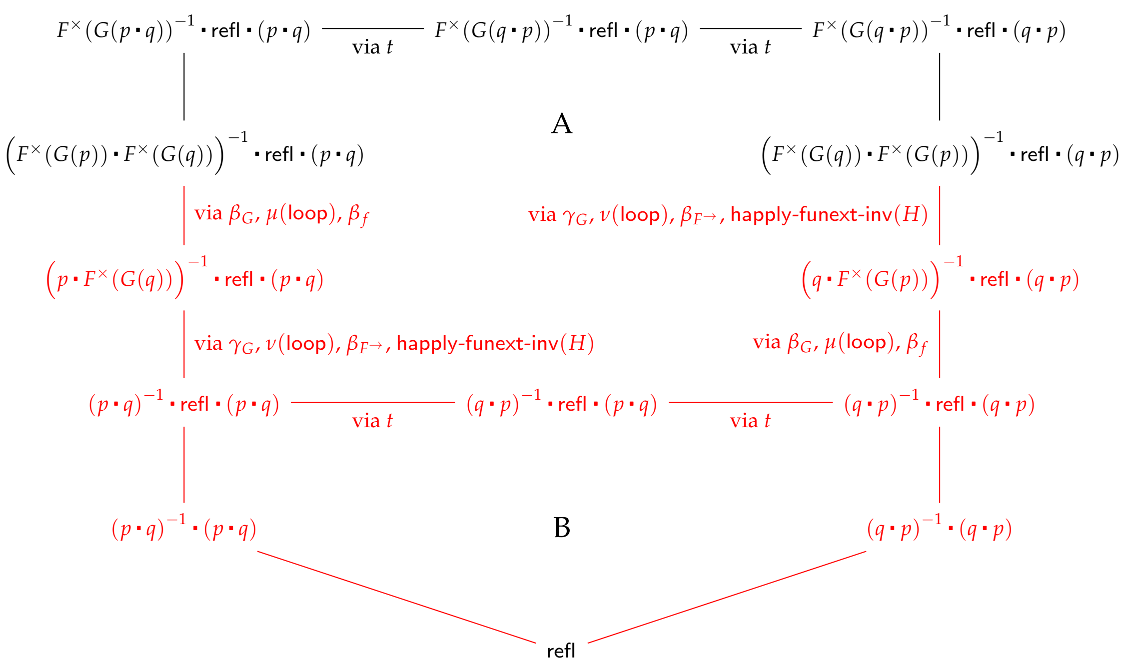
$$(u_2 \cdot v_2)^{-1} \cdot (u_2 \cdot v_2)$$

$$\Big|$$

$$\mathsf{refl}$$

This is clear by path induction.

Using this observation, it suffices to show that the outer part of the following diagram commutes:



Part B clearly commutes. This leaves us to show that part A commutes. We now make the following observation:

- For any 2-paths $\alpha_u^1 : u_1 =_{a=_A b} u_2$, $\alpha_u^2 : u_1 =_{a=_A b} u_3$, $\alpha_u^3 : u_3 =_{a=_A b} u_4$, $\alpha_u^4 : u_2 =_{a=_A b} u_4$, $\alpha_v : v_1 =_{c=_A d} v_2$ and path $w : b =_A c$ such that

$$\begin{array}{ccc}
u_1 & \xrightarrow{\;\alpha_u^2\;} & u_3 \\
\alpha_u^1 \Big| & = & \Big| \alpha_u^3 \\
u_2 & \xrightarrow[\;\alpha_u^4\;]{} & u_4
\end{array}$$

the following diagram commutes:

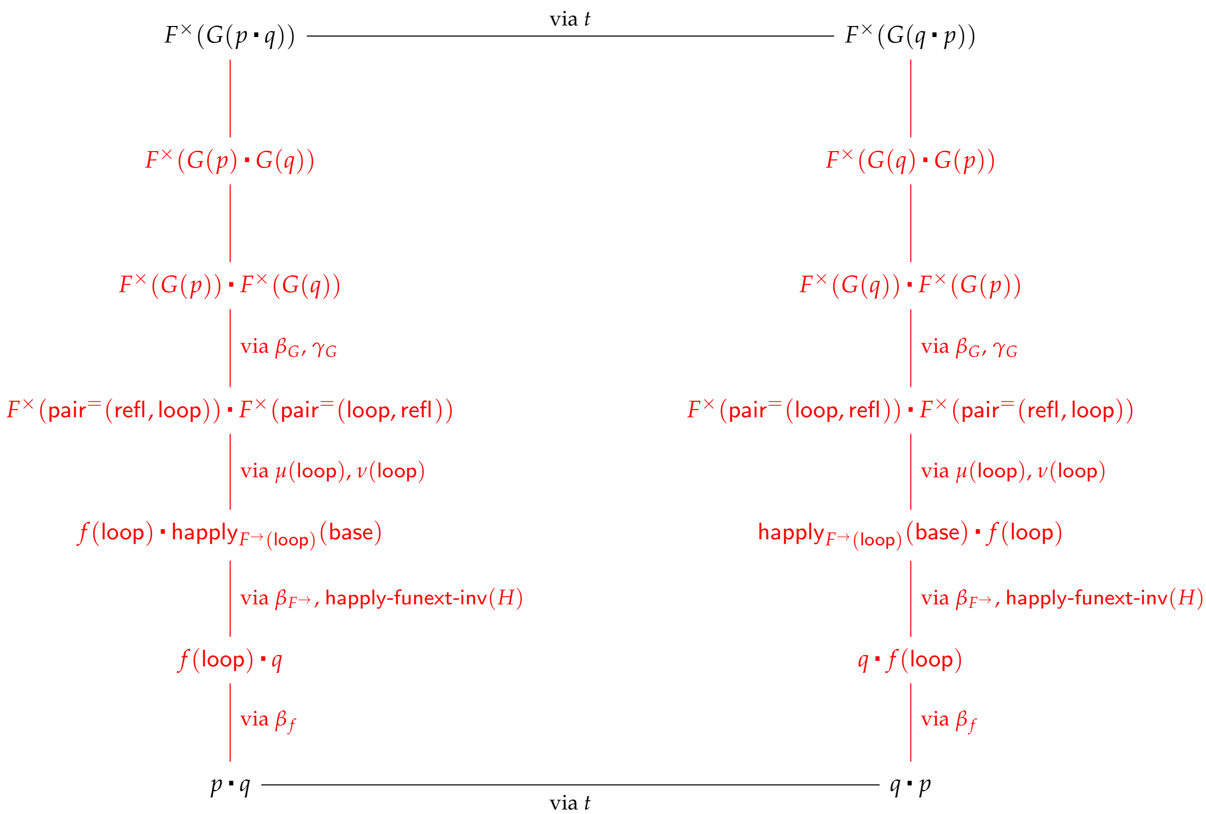
$$\begin{array}{ccccc}
u_1^{-1} \cdot w \cdot v_1 & \xrightarrow{\text{via } \alpha_u^2} & u_3^{-1} \cdot w \cdot v_1 & \xrightarrow{\text{via } \alpha_v} & u_3^{-1} \cdot w \cdot v_2 \\
\text{via } \alpha_u^1 \Big| & & & & \Big| \text{via } \alpha_u^3 \\
u_2^{-1} \cdot w \cdot v_1 & \xrightarrow[\text{via } \alpha_u^4]{} & u_4^{-1} \cdot w \cdot v_1 & \xrightarrow[\text{via } \alpha_v]{} & u_4^{-1} \cdot w \cdot v_2
\end{array}$$

This is clear by path induction on α_v, α_u^2, α_u^4.

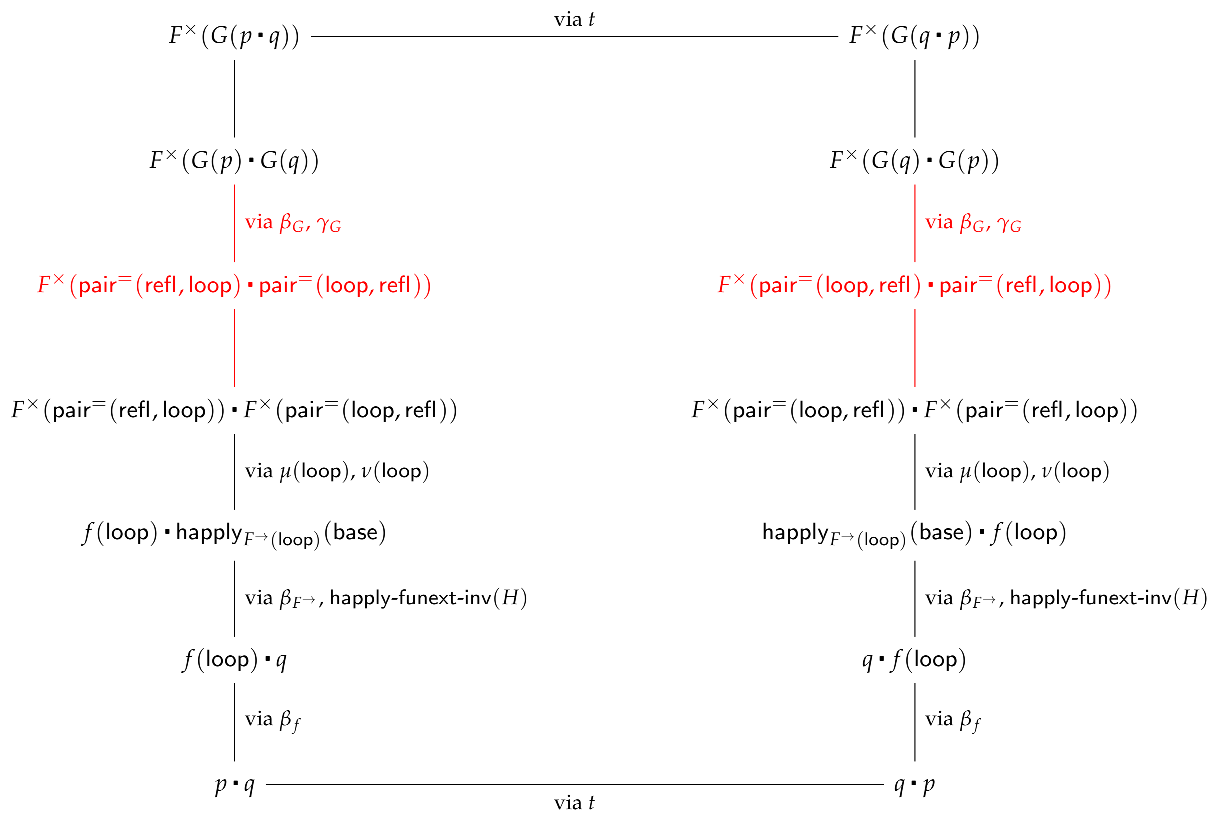
Using this observation, it suffices to show that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc}
F^\times(G(p \cdot q)) & \xrightarrow{\text{via } t} & F^\times(G(q \cdot p)) \\
\Big| & & \Big| \\
F^\times(G(p)) \cdot F^\times(G(q)) & & F^\times(G(q)) \cdot F^\times(G(p)) \\
\Big| \text{via } \beta_G, \mu(\mathsf{loop}), \beta_f & & \text{via } \gamma_G, \nu(\mathsf{loop}), \beta_{F^\to}, \mathsf{happly\text{-}funext\text{-}inv}(H) \Big| \\
p \cdot F^\times(G(q)) & & q \cdot F^\times(G(p)) \\
\Big| \text{via } \gamma_G, \nu(\mathsf{loop}), \beta_{F^\to}, \mathsf{happly\text{-}funext\text{-}inv}(H) & & \text{via } \beta_G, \mu(\mathsf{loop}), \beta_f \Big| \\
p \cdot q & \xrightarrow[\text{via } t]{} & q \cdot p
\end{array}$$

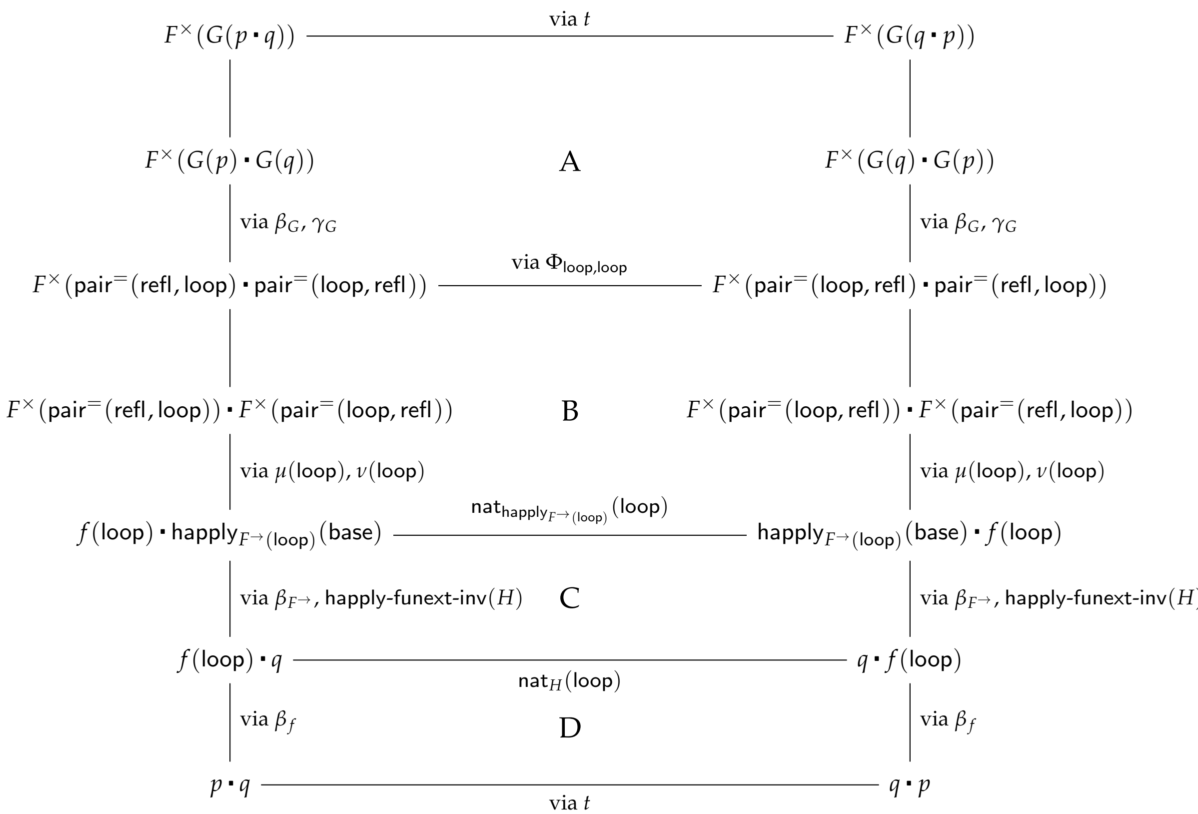
After some rearranging we get:



or equivalently:



Finally, this diagram can be viewed as follows:



where for any $\alpha : x =_{\mathbb{S}^1} y$, the 2-path

$$\mathsf{nat}_{\mathsf{happly}_{F^{\to}(\mathsf{loop})}}(\alpha) : f(\alpha) \cdot \mathsf{happly}_{F^{\to}(\mathsf{loop})}(y) = \mathsf{happly}_{F^{\to}(\mathsf{loop})}(x) \cdot f(\alpha)$$

is defined by induction on α.

Now rectangles A and D commute by diagrams (1) and (2) respectively. Rectangles B and C commute by a suitable path induction. □